

### Вступительные задачи, 9–10 класс

1. Даны две арифметические прогрессии  $a_1, a_2, \dots$  и  $b_1, b_2, \dots$ . Известно, что  $a_1 = b_1$ , и для каждого номера  $i$  остатки от деления  $a_i$  и  $b_i$  на  $i$  совпадают. Докажите, что последовательности совпадают.
2. Дано  $n$  фишек нескольких цветов, причём фишек каждого цвета не более  $n/2$ . Докажите, что их можно расставить на окружности так, чтобы никакие две фишки одинакового цвета не стояли рядом.
3. По двум пересекающимся прямым с постоянными, но не равными скоростями движутся точки  $A$  и  $B$ . Докажите, что существует точка  $P$ , для которой в любой момент времени  $AP : BP = k$ , где  $k$  – отношение скоростей.
4. Из точки  $A$  вне окружности радиуса  $R$  проведены к ней две касательные  $AB$  и  $AC$ , где  $B$  и  $C$  – точки касания. Пусть  $|BC| = a$ . Докажите, что  $4R^2 = r^2 + r_a^2 + \frac{a^2}{2}$ , где  $r$  – радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , а  $r_a$  – радиус внеписанной окружности.
5. На одну из сторон угла, образованного двумя зеркалами, падает луч. Докажите, что он отразится от зеркал конечное число раз.
6. Известно, что уравнение  $x^{12} - abx + a^2 = 0$  имеет корень  $x_0 > 2$ . Докажите, что  $|b| > 64$ .
7. На ребрах связного графа расставлены стрелки так, что для каждой вершины числа входящих и выходящих ребер равны. Докажите, что двигаясь по стрелкам, можно добраться от любой вершины до любой другой.
8. Докажите, что точки пересечения парабол  $y = x^2 + x - 40$  и  $x = y^2 + y - 41$  лежат на одной окружности.