

6 класс

1. Грани 27 единичных кубиков покрашены в белый, красный и синий цвета. Известно, что из этих кубиков можно сложить куб, вся "внешность" которого будет белой, можно сложить куб с красной внешностью и можно сложить куб с синей внешностью. Докажите, что число граней белого цвета равно числу красных граней.

2. Аня и Веня собирали грибы. У Вени количество грибов оказалось меньше утроенного количества Аниных грибов. После того, как Веня подарил Ане четыре гриба, у него всё равно осталось больше грибов, чем у Ани. Сколько грибов нашёл каждый из ребят, если всего у них меньше 20 грибов?

3. Можно ли клетки таблицы 8×8 покрасить в 16 цветов так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону?

4. Боря задумал натуральное число и сообщил следующие сведения о нём: если оно делится на 3, то оно заключено между 50 и 59 (включительно); если оно не делится на 4, то оно заключено между 60 и 69; если оно не делится на 6, то оно заключено между 70 и 79. Какое число это может быть?

5. В комнате находится 100 школьников, один из которых – Вася. Оказалось, что все присутствующие в комнате имеют поровну знакомых, причем если двое незнакомы, то ровно один из них знаком с Васей. Сколько знакомых может быть у Васи в этой комнате? (Перечислите все варианты и докажите, что других нет).

6. Натуральные числа a и b таковы, что натуральное число $a - b$ делится на натуральное число $3b - a$. Докажите, что тогда и число $a + b$ делится на $3b - a$.

7. На плоскости проведено 100 различных прямых и из точек пересечения этих прямых отмечено 300 точек. Докажите, что можно выбрать какие-то 4 отмеченные точки, никакие три из которых не лежат на одной проведенной прямой.

8. Найдите наименьшее натуральное число, у которого есть три разных собственных делителя с суммой 1001. (Собственный делитель числа – это его натуральный делитель, отличный от 1 и самого числа.)

В каждой задаче, где требуется отыскать ответ, следует найти все возможные ответы и доказать, что других нет. Если в задаче нужно найти наименьшее значение какой-то величины, то, кроме ответа, нужно предъявить пример, когда величина принимает такое значение, и доказать, что меньше она быть не может. Рассуждения в решении должны быть проведены полностью, а утверждения – обоснованы.