

9–10 классы

1. Докажите, что среди любых 2024 различных целых чисел найдутся такие три различных числа a , b и c , что число $a(b - c)$ делится на 2024.
2. Функция $f(x)$ задана формулой $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$. Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $f(x) = f(y)$.
3. Докажите, что сумма квадратов всех делителей натурального числа n (включая 1 и n) не может равняться $(n + 1)^2$.
4. Точка M лежит на продолжении стороны AB квадрата $ABCD$, причем точка B есть середина отрезка AM . Докажите, что на каждой прямой, параллельной диагонали BD , квадрат $ABCD$ и треугольник AMD отсекают равные отрезки.
5. Известно, что $x \geq y \geq z \geq w$. Докажите неравенство $(x + y + z + w)^2 \geq 8(xz + yw)$.
6. Для целых чисел a , b , c выполняется равенство: $ab + bc + ca = 0$. Докажите, что abc представляется в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.
7. CH – высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника ABC . На отрезках AH и BH , как на диаметрах, построены окружности, пересекающие катеты в точках M и N . Докажите, что MN – касательная к построенным окружностям.
8. На прямой задан отрезок, концы которого отмечены. Других отмеченных точек в начале нет. Вася умеет отмечать точку, если она делит какой-нибудь отрезок с отмеченными концами в отношении 1 : 3, считая слева. Докажите, что отметить середину исходного Васе не удастся.

В каждой задаче, где требуется отыскать ответ, следует найти все возможные ответы и доказать, что других нет. Если в задаче нужно найти наименьшее значение какой-то величины, то, кроме ответа, нужно предъявить пример, когда величина принимает такое значение, и доказать, что меньше она быть не может. Рассуждения в решении должны быть проведены полностью, а утверждения – обоснованы.