Турнир математических боёв № 1 А

1. В каждую клетку квадрата 3×3 записано целое число. При этом сумма чисел в каждом столбце, кроме первого, в 4 раза больше, чем в предыдущем. Сумма чисел в каждой строке, кроме первой, на 1 больше, чем в предыдущей. А в одной из строк сумма чисел составляет 2008. Найдите сумму чисел в первом столбце.
2. Восстановите запись примера на умножение и докажите, что других вариантов нет:

$$\begin{array}{cccccc} & & \times & * & * & * \\ & & & * & * & * \\ \hline & & * & * & * & 6 \\ + & * & * & 6 & 6 & \\ & 6 & * & 6 & & \\ \hline & * & * & * & * & * \end{array}$$

3. Имеются гири трёх типов: тяжёлые, средние и лёгкие. У всех тяжёлых гирь веса одинаковые, у всех средних одинаковые, и у всех лёгких тоже одинаковые. Известно, что одну из гирь можно уравновесить двумя другими, причём одну из этих двух тоже можно уравновесить двумя другими. Сколько лёгких гирь уравновешивают одну тяжёлую гирю (найдите все варианты ответа и докажите, что других нет)?
4. На доске записаны 8 чисел: 1, 2, 3, ..., 8. За один ход можно поменять местами два числа, если одно из них делится на другое. Можно ли с помощью таких действий переставить эти числа так, чтобы они были записаны в обратном порядке?
5. На прямой слева направо в указанном порядке расставлены точки A, B, C, D, E. Одна из них покрашена в жёлтый цвет, одна – в зелёный, при этом жёлтая точка находится левее зелёной. Расстояние между точками A и C равно 7 см, между жёлтой точкой и точкой B – 8 см, между зелёной точкой и точкой D – 9 см. Найдите расстояние между жёлтой и зелёной точками.
6. Тридцать три ореха разложены по кучкам, причём в каждой кучке больше одного ореха. После того, как из каждой кучки в первую положили по одному ореху, орехов во всех кучках стало поровну. Сколько имеется кучек, и сколько орехов было в каждой из них первоначально?

Турнир математических боёв № 1 В

1. Какое наименьшее количество камешков должно быть у Олеси, чтобы их можно было разделить на три кучки так, чтобы число камешков в первой кучке было больше, чем сумма чисел камешков в двух других кучках и меньше, чем произведение чисел камешков в этих двух кучках?
2. На доске записаны 8 чисел: 1, 2, 3, ..., 8. За один ход можно поменять местами два числа, если одно из них делится на другое. Можно ли с помощью таких действий переставить эти числа так, чтобы они были записаны в обратном порядке?
3. На доске написано число 1. За один ход разрешается либо умножить это число на 2, либо переставить его цифры в любом порядке. Можно ли, действуя таким образом, получить число 2008?
4. На доске слева направо записаны все натуральные числа 1, 2, …, 1000. Петя стирает все числа через одно пока не дойдет до конца ряда чисел, причём первое число 1 он не трогает. Дальше он возвращается к левому краю и повторяет эту операцию до тех пор, пока не будут стерты все записанные на доске числа через одно. Какое число сотрёт Петя последним, продолжая эти действия, пока не останется одно число?
5. Расставьте на шахматной доске 16 ладей так, чтобы каждая била столько же других ладей, сколько и пустых клеток. Ладья бьёт все незанятые клетки горизонтали и вертикали, на которых стоит, но до первой стоящей на ее пути ладьи.
6. У Маши был прямоугольник $m \times n$ клеток, где $m \le n$ – натуральные числа. Она отрезала от его угла квадрат 2×2. Потом она смогла оставшийся кусок одним прямолинейным разрезом разделить на три треугольника. Какими могут быть размеры прямоугольника $m \times n$?

Турнир математических боёв № 1 С

1. В ряд выписаны 10 натуральных чисел. При этом по краям стоят две единицы, а в остальных местах – попарно различные натуральные числа, отличные от единицы. Известно, что произведение любых двух чисел, стоящих через одно число друг от друга, делится на число, записанное между ними. Найти наибольшее возможное значение количества простых чисел среди выписанных.

2. В угловой клетке шахматной доски 8×8 стоял слон. Он сделал 4 хода и снова оказался в исходной угловой клетке. Сколькими способами он мог это сделать?
3. Найдите значение выражения:
$2016^2 - 2015^2 - 2014^2 + 2013^2 + 2012^2 - 2011^2 - 2010^2 + 2009^2 + \ldots + 4^2 - 3^2 - 2^2 + 1^2$.
4. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC выбрали точки D, E, F соответственно так, что $EF \parallel AB$ и $ED \parallel AC$. Прямые DF и BC пересекаются в точке K. Оказалось, что $DF = FK$. Найдите отношение $BE : EC$.
5. Расставьте на шахматной доске 16 ладей так, чтобы каждая била столько же других ладей, сколько и пустых клеток. Ладья бьёт все незанятые клетки горизонтали и вертикали, на которых стоит, но до первой стоящей на ее пути ладьи.
6. Существуют ли четыре попарно различные числа x, y, u, v, такие что $\frac{x+u}{x+v} = \frac{y+u}{y+v}$?

Турнир математических боёв № 2 А

1. В квадрате 3×3 каждая клетка покрашена в один из 3 цветов. Раскраска называется *правильной*, если в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно докрасить до правильной раскраски, если уже покрашены без нарушения правильности 3 клетки?
2. В таблицу 4×4 записали натуральные числа. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в каждой следующей строке на 2 больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце на 3 больше, чем в предыдущем?
3. На доске нарисован квадрат 3×3. Учительница Марья Ивановна написала в одной из клеток квадрата число и дала ученику Пете задание: он должен поочерёдно вписывать по одному числу в любую пустую клетку, причём если все клетки, имеющие с ней общую сторону, пустые, то число, которое он пишет, должно быть больше всех, написанных к тому времени. А если хотя бы одна из соседних по стороне клеток заполнена, то число, которое он пишет, должно быть меньше всех, написанных к тому времени. В конце концов получилась следующая таблица. Какое число написала Марья Ивановна? Найдите все варианты.

1	9	4
8	5	2
3	7	6

4. Разрежьте нарисованный на клетчатой бумаге квадрат 4×4 по сторонам клеток на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни вершинами.
5. ТОРТ + ТОРТ + ТОРТ + … + ТОРТ = ПУЗО. Какое наибольшее количество ТОРТов может быть, чтобы ребус имел решение? Числа не могут начинаться с нуля. Одинаковые буквы соответствуют одинаковым цифрам, разные – разным.
6. Шестиклассник Вася написал на доске трёхзначное число, в записи которого нет ни одного нуля. Затем под ним он подписал все числа, которые можно получить из написанного числа перестановкой цифр. Сумма всех написанных на доске чисел составила 2775. Какое число придумал Вася? Найдите все варианты.

Турнир математических боёв № 2 В

1. Алиса задумала 5 разных чисел и сообщила Андрею суммы пяти пар из них – три наименьшие 29, 33, 36 и две наибольшие – 47 и 53. Сможет ли Андрей найти наибольшее из задуманных Алисой чисел? Если да, то найдите это число.
2. В квадрате 4×4 каждая клетка покрашена в один из 4 цветов. Раскраска называется *правильной*, если в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно докрасить до правильной раскраски, если уже покрашены без нарушения правильности 4 клетки?
3. В ряд выписали числа 1, 2, 3, …, 2019. Сколько всего нечётных цифр будет в их записи?
4. На плоскости отметили 12 точек, затем каждые две из них соединили отрезком. Какое наибольшее число таких отрезков может пересечь прямая, которая не проходит ни через одну из таких точек?
5. Расставьте в ряд числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 так, чтобы каждое число было делителем суммы всех предыдущих чисел (первое число должно без остатка делиться на второе, сумма первых двух – на третье, сумма первых трёх на четвёртое, и т.д.)

6. Углы AOB, BOC и COD равны между собой, а угол AOD втрое меньше каждого из них. Все лучи OA, OB, OC, OD различны. Найдите величину угла AOD (все возможные варианты).

Турнир математических боёв № 2 С

1. В квадрате $n \times n$ каждая клетка покрашена в один из n цветов. Раскраска называется *правильной*, если в каждой строке и в каждом столбце нет двух клеток одного цвета. Всегда ли можно докрасить до правильной раскраски, если уже покрашены без нарушения правильности n клеток?
2. В футбольном турнире, где каждая команда по одному разу сыграла с каждой, участвовали команды А, Б, В, Г, Д и Е. За победу команда получала 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0. В итоге оказалось, что команды А, Б, В, Г и Д набрали по 7 очков. Какое наибольшее количество очков могла набрать команда Е?
3. Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать несколько раз). Докажите, что после 80 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.
4. Найдите наибольшее простое число p, для которого выполняется условие – если вычеркнуть в числе любое количество цифр (кроме всех, конечно), то оставшееся число будет простым.
5. Про натуральное число n известно, что n^3 записывается не менее, чем 5 цифрами, а число n^8 – не более, чем 11 цифрами. Сколько цифр в записи числа n^{24}?
6. Равнобедренный треугольник ABC с прямым углом C и равнобедренный треугольник ABD ($AB = BD$) имеют равные площади. Найдите угол ADB.

Турнир математических боёв № 3 А

1. В ребусе ДЕНЕГ + НАДО = МНОГО одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным – разные. Найдите решение ребуса, в котором МНОГО имеет наибольшее значение.
2. На свободные поля шахматной доски по одной выставляются ладьи. Новую ладью разрешается выставить, если она бьёт четное число пустых клеток. Как, действуя таким образом, занять ладьями все 64 клетки доски?
3. Петя записал в клетки таблицы 3×3 натуральные числа. Сумма всех чисел оказалась равной 900. Докажите, что Вася сможет выбрать три клетки, не имеющих общих сторон, сумма чисел в которых не меньше 300.
4. У Васи есть клетчатый прямоугольник 5×11. Он хочет вырезать из него по линиям сетки две одинаковые фигуры, из которых можно сложить квадрат. Часть клеток может остаться лишней. Какой наибольший размер квадрата можно получить?
5. Фигура «Летающая Одноцветная Ладья» (ЛОЛ) ходит по вертикали и горизонтали по клеткам одного цвета (белого или черного) и может перепрыгивать через другие фигуры. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга ЛОЛов можно расставить на доске 5×5?
6. Фигура мустанг ходит, чередуя ходы коня и слона (первый ход может быть любой из них). Укажите маршрут мустанга на доске 3×3, начинающийся с какой-нибудь клетки и проходящий по всем клеткам ровно по одному разу.

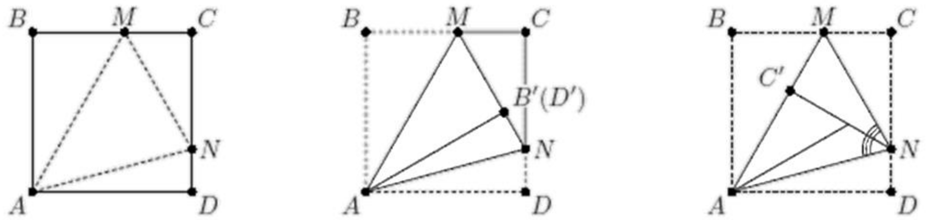
Турнир математических боёв № 3 В

1. Андрей, Борис, Василий, Геннадий и Дмитрий играли в настольный теннис парами так, что каждые двое сыграли с каждой другой парой ровно один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Известно, что Андрей проиграл ровно 12 раз, а Борис ровно 6 раз. Сколько раз выиграл Геннадий?
2. В ряд слева направо выставлены фишки с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Автомат по очереди берёт самую левую фишку и ставит её посередине, дальше берёт самую правую и снова ставит посередине, дальше снова самую левую и так далее. То есть после первого хода у нас получается такой порядок номеров фишек слева направо: 2, 3, 4, 1, 5, 6, 7, после второго – 2, 3, 4, 7, 1, 5, 6. Какая фишка останется в центре после 2019 хода?
3. Известно, что числа a, b, c и d – целые и

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{a+b}{c+d}$$

Может ли выполняться равенство $abcd$ = 201620172018?

4. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник (см. рисунки). Найдите отмеченный угол.



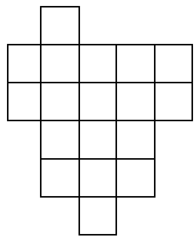
5. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого этого числа. Натуральное число назовём *удивительным*, если самый большой его собственный делитель на 1 меньше, чем квадрат самого маленького собственного делителя. Найдите все удивительные числа.
6. Фигура мустанг ходит, чередуя ходы коня и слона (первый ход может быть любой из них). Укажите маршрут мустанга на доске 4 × 4, начинающийся с какой-нибудь клетки и проходящий по всем клеткам ровно по одному разу.

Турнир математических боёв № 3 С

1. Андрей, Борис, Василий, Геннадий и Дмитрий играли в настольный теннис парами так, что каждые двое сыграли с каждой другой парой ровно один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Известно, что Андрей проиграл ровно 12 раз, а Борис ровно 6 раз. Сколько раз выиграл Геннадий?
2. Для любых положительных a, b, c докажите, что
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$
3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K, для которой CK = BC. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в ее середине. Найдите углы треугольника ABC.
4. Найдите все пары действительных чисел (x, y), которые удовлетворяют условию: $x+y=x^2+y^2=x^3+y^3$.
5. Найдите наибольшее натуральное число n, которое является делителем числа p^4-1 для любого простого числа $p > 3$.
6. Фигура мустанг ходит, чередуя ходы коня и слона (первый ход может быть любой из них). Укажите маршрут мустанга на доске 5 × 5, начинающийся с какой-нибудь клетки и проходящий по всем клеткам ровно по одному разу.

Личная олимпиада 4-5 класс

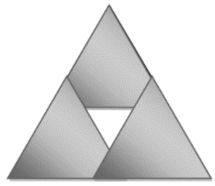
1. Число называется <u>палиндромом</u>, если оно совпадает с числом, полученным из данного при записывании его цифр в обратном порядке. Например, числа 1111 и 303 – палиндромы, а числа 5050 и 12312 – нет. Может ли сумма двух трёхзначных палиндромов равняться четырёхзначному палиндрому? Ответ надо обосновать.
2. У Пети есть 19 камешков. Сможет ли он разделить их на 4 кучки так, чтобы число камешков в первой кучке было больше, чем сумма чисел камешков в трёх других кучках и меньше, чем половина произведения чисел камешков в этих трёх кучках? Ответ надо обосновать.
3. Разрежьте фигуру на 3 равные части.



4. Рассмотрим все возможные цепочки из 8 цифр, каждая из которых – 0 или 1. Сколько из них содержат пару стоящих рядом цифр 01 (именно в таком порядке)? Ответ надо обосновать.
5. Какую длину должна иметь наименьшая сторона прямоугольника, чтобы его можно было разрезать как на квадраты 3×3, так и на прямоугольники 5×7? Ответ надо обосновать.

Личная олимпиада 6 класс

1. Возраст ученицы одного из лицеев в 2018 году был равен утроенной сумме цифр её года рождения. Сколько лет ей было в 2018 году?
2. За столом собрались 4 жителя, каждый из которых был либо лгуном, либо рыцарем. Лгуны при ответе на вопрос всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый из четырёх жителей в ответ на вопрос, кто сидит за столом, сказал: «Из троих, что сидят со мной за столом, ровно два лгуна». Сколько может на самом деле сидеть за столом рыцарей и лгунов?



3. Равносторонний треугольник со стороною длины 36 покрыт тремя равными равносторонними треугольниками со стороной длины 21, как показано на рисунке. Найдите длину стороны равностороннего треугольника, который остался непокрытым.
4. При тестировании ученикам было предложено 30 вопросов на которые надо было записать правильный ответ. За каждый правильный ответ ученик получал «+5» баллов, а за каждый неправильный ответ или при отсутствии ответа – получал «–1» балл. Какое наименьшее положительное количество баллов мог получить ученик?
5. В некотором городе стали популярны математические клубы. Любые два из них имеют хотя бы одного общего участника. Докажите, что мэр города может распределить линейки и циркули между всеми жителями города таким образом, что ровно один житель получит и линейку, и циркуль, а каждый другой житель получит или линейку, или циркуль, при этом в каждом математическом клубе будет участник с линейкой и участник с циркулем.

Личная олимпиада 7-8 класс

1. Если бы Петя на тестировании последнего предмета набрал 180 баллов, то его средний балл по всем предметам стал бы 156. Но Петя набрал всего 140 баллов за последний предмет и 148 баллов в среднем. По какому количеству предметов тестировался Петя?
2. Сколько существует вариантов заполнения клеток таблицы 2018×2018 натуральными числами таким образом, чтобы сумма любых трёх соседних чисел в одной строке или столбце была равна 4?
3. Найдите наименьшее число, которое делится на 36 и получается некоторой перестановкой цифр $1, 2, ..., k$, где $k \le 9$.
4. В землю посадили саженец с 4 листочками без цветочков. Каждый день на нём вырастает либо 3 новых цветочка и 7 листочков, либо 4 новых цветочка и 9 листочков. Через некоторое время на саженце было 50 листочков. Сколько в этот момент на саженце было цветочков?
5. В стране один город расположен в центре окружности и еще n городов, расположенных по окружности. Каждый из городов на окружности соединён дорогами с двумя соседними и с городом, расположенным в центре. На каждой из $2n$ дорог установлено одностороннее движение, таким образом, что из каждого города есть выезд и в каждый город есть въезд. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, не нарушив правила.

РЕШЕНИЯ

Личная олимпиада 4-5 класс

1. *Число называется <u>палиндромом</u>, если оно совпадает с числом, полученным из данного при записывании его цифр в обратном порядке. Например, числа 1111 и 303 – палиндромы, а числа 5050 и 12312 – нет. Может ли сумма двух трёхзначных палиндромов равняться четырёхзначному палиндрому?*

<u>Ответ:</u> Да. Например, $999 + 222 = 1221$. Возможны другие решения.

<u>Критерии.</u> Любой верный пример – 7 баллов.

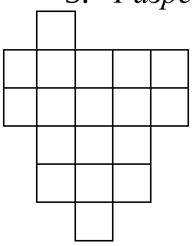
2. *У Пети есть 19 камешков. Сможет ли он разделить их на 4 кучки так, чтобы число камешков в первой кучке было больше, чем сумма чисел камешков в трёх других кучках и меньше, чем половина произведения чисел камешков в этих трёх кучках?*

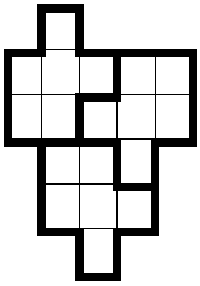
<u>Ответ:</u> Да. 10, 4, 3, 2.

<u>Решение.</u> Разделим камешки, как показано. Тогда $10 > 4 + 3 + 2 + 1$ и $10 < (4 \cdot 3 \cdot 2) : 2 = 12$.

<u>Критерии.</u> Верный пример – 7 баллов.

3. *Разрежьте фигуру на 3 равные части.*





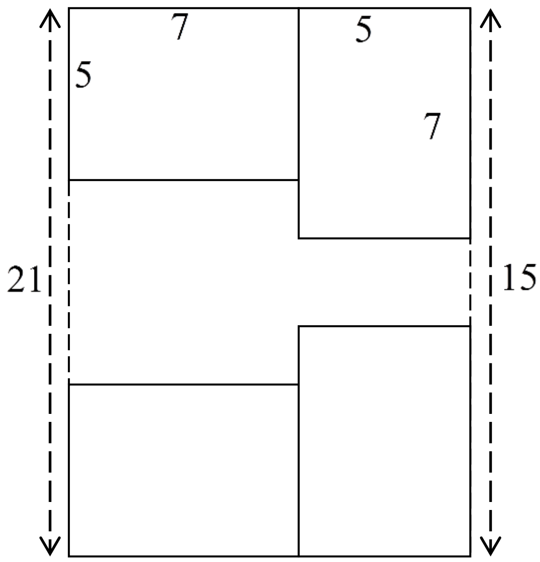
Решение.
Критерии. Правильное разрезание – 7 баллов.

4. *Рассмотрим все возможные цепочки из 8 цифр, каждая из которых – 0 или 1. Сколько из них содержат пару стоящих рядом цифр 01 (именно в таком порядке)? Ответ надо обосновать.*

Ответ: 247.
Решение. Всего таких цепочек $2^8 = 256$. Найдём количество цепочек, которые не содержат такой пары: это могут быть лишь цепочки, которые начинаются с единиц, а заканчиваются нулями. После 0 не может идти 1. Таких цепочек ровно 9 – они могут содержать от 0 до 8 нулей. Таким образом искомых цепочек всего $256 - 9 = 247$.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Если найдено общее количество цепочек – 1 балл. Если есть идея подсчёта неподходящих вариантов – 1 балл. Только ответ – 1 балл. Эти баллы суммируются.

5. *Какую длину должна иметь наименьшая сторона прямоугольника, чтобы его можно было разрезать как на квадраты 3×3, так и на прямоугольники 5×7? Ответ надо обосновать.*

Ответ: 12.
Решение. Длина каждой стороны должна делиться на 3. Кроме того она должна иметь вид $5x + 7y$, где x, y – натуральные числа или 0. Очевидно, что наименьшее такое значение $12 = 7 + 5$. Остается привести пример прямоугольника, у которого есть такая сторона, удовлетворяющего условию задачи. Это прямоугольник 12×105, так как $105 = 21 \cdot 5 = 15 \cdot 7$.
Критерии. Полное решение – 7 баллов. Доказано, что сторона не меньше 12 (оценка) – 3 балла. Приведён пример прямоугольника 12×105 с разрезанием без оценки – 3 балла. Без разрезания – 2 балла. Оценка и пример без разрезания – 5 баллов. Идея делимости на 3 – 1 балл. Только ответ – 1 балл. Два последних случая суммируются.



РЕШЕНИЯ
Личная олимпиада 6 класс

1. *Возраст ученицы одного из лицеев в 2018 году был равен утроенной сумме цифр её года рождения. Сколько лет ей было в 2018 году?*

Ответ: 15 лет.
Решение. Так как девочка учится в школе, то она родилась не позднее 2000 года. Пусть год её рождения $\overline{20xy}$. Тогда должно выполняться равенство:
$2018 - \overline{20xy} = 3(2 + 0 + x + y) \Rightarrow 18 - 10x - y = 6 + 3x + 3y \Rightarrow 12 = 13x + 4y$. Так как x, y – цифры, то из последнего равенства получаем, что $x = 0$ и $y = 3$, то есть она родилась в 2003 году и ей 15 лет.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 1 балл.

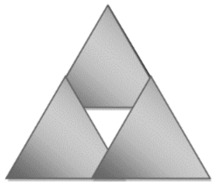
2. *За столом собрались 4 жителя, каждый из которых был либо лгуном, либо рыцарем. Лгуны, при ответе на вопрос всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый из четырёх жителей в ответ на вопрос, кто сидит за столом, сказал: «Из троих, что сидят со мной за столом, ровно два лгуна». Сколько может на самом деле сидеть за столом рыцарей и лгунов?*

Ответ: 2 лгуна и 2 рыцаря или 4 лгуна.

Решение. Если есть хотя бы 1 рыцарь, то он говорит правду. Тогда за столом должно быть ровно 2 лгуна и ровно 2 рыцаря. В таком случае оба рыцаря сказали правду, а оба лгуна – солгали. Если же нет ни одного рыцаря, то за столом – 4 лгуна, что также возможно. Тогда каждый из них лжёт.

Критерии. Полное решение – 7 баллов, только один случай – 3 балла, только ответ – 1 балл.

3. *Равносторонний треугольник со стороною длины 36 покрывается тремя равными равносторонними треугольниками со стороной длины 21, как показано на рисунке. Найдите длину стороны равностороннего треугольника, который остался непокрытым.*



Ответ: 9.

Решение. Пусть x – длина перекрытия меньших треугольников по стороне большого треугольника, тогда получаем уравнение: $21+(21-x)=36$, откуда $x=6$. Длина стороны треугольника, оставшегося непокрытым в середине большого треугольника, равна $21-6\cdot 2=9$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов, только ответ – 1 балл.

4. *При тестировании ученикам было предложено 30 вопросов на которые надо было записать правильный ответ. За каждый правильный ответ ученик получал «+5» баллов, а за каждый неправильный ответ или при отсутствии ответа – получал «–1» балл. Какое наименьшее положительное количество баллов мог получить ученик?*

Ответ: 6 баллов.

Решение. Пусть ученик верно записал ответы на k вопросов и на n – не верно. Тогда $k+n=30$, или $n=30-k$. Возможное количество баллов, которое мог набрать ученик, равно

$N=5k-n=5k-30+k=6k-30=6(k-5)$.

То есть количество набранных баллов всегда должно быть кратно 6, поэтому наименьшее возможное положительное количество баллов – 6. Тогда $k-5=1 \Rightarrow k=6$, $n=24$ и набранные баллы:

$N=5\cdot 6-24=6$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов, оценка – 3 балла, пример – 3 балла, только ответ – 1 балл.

5. *В некотором городе стали популярны математические клубы. Любые два из них имеют хотя бы одного общего участника. Докажите, что мэр города может распределить линейки и циркули между всеми жителями города таким образом, что ровно один житель получит и линейку, и циркуль, а каждый другой житель получит или линейку, или циркуль, при этом в каждом математическом клубе будет участник с линейкой и участник с циркулем.*

Решение. Рассмотрим клуб K, в котором наименьшее количество участников, если таких клубов несколько, то выберем любой. Дадим одному из его участников (назовём его Васей), и линейку, и циркуль. Всем остальным участникам этого клуба дадим циркуль. Всем другим жителям – линейку. Покажем, что такое распределение удовлетворяет условию задачи. Все клубы, в которых участвует Вася, имеют участника с линейкой и циркулем, то есть оба инструмента. Если Вася не участвует в клубе, то в нём есть хотя бы один общий участник с клубом K, то есть житель с циркулем. Но там есть обязательно житель, не являющийся участником клуба K, так как иначе в нём участников клуба станет меньше, чем в клубе K (так как там ещё есть Вася). Таким образом найдется житель, имеющий линейку. Утверждение доказано.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

РЕШЕНИЯ
Личная олимпиада 7-8 класс

1. *Если бы Петя на тестировании последнего предмета набрал 180 баллов, то его средний балл по всем предметам стал бы 156. Но Петя набрал всего 140 баллов за последний предмет и 148 баллов в среднем. По какому количеству предметов тестировался Петя?*

Ответ: 5 предметов.

Решение. Пусть всего было n предметов. Тогда до тестирования последнего предмета было всего $156n - 180 = 148n - 140$ баллов. Получаем $n = 5$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 1 балл.

2. *Сколько существует вариантов заполнения клеток таблицы 2018 × 2018 натуральными числами таким образом, чтобы сумма любых трёх соседних чисел в одной строке или столбце была равна 4?*

Ответ: 6 вариантов.

Решение. Заполним верхний левый квадрат 2 × 2 натуральными числами a, b, c, d, которые удовлетворяют условиям $a + b < 4$, $c + d < 4$, $a + c < 4$, $b + d < 4$. Покажем, что дальше таблица заполняется однозначно. Сначала заполним квадрат 3 × 3, что делается однозначно:

a	b	
c	d	

Дальше такие квадраты 3 × 3 продолжаются во всех направлениях. Таким образом нам остается посчитать количество вариантов заполнения начального квадрата 2 × 2.

a	b	$4 - a - b$
c	d	$4 - c - d$
$4 - a - c$	$4 - b - d$	$a + b + c + d - 4$

Если $a = 2$, то $b = c = 1$ и для d есть два варианта: $d = 1$ или $d = 2$.

Если $a = 1$, то 1) $b = c = 1$ и для d есть лишь вариант $d = 2$ (иначе клетка в третьей строке и третьем столбце содержит 0); 2) $b = c = 2$, или $b = 2$, $c =1$, или $b = 1$, $c = 2$ и для d есть единственный вариант $d = 1$. Итого есть 6 вариантов.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Идея, что квадрат 2 × 2 определяет всё – 2 балла. Только ответ – 1 балл.

3. *Найдите наименьшее число, которое делится на 36 и получается некоторой перестановкой цифр 1, 2, ..., k, где $k \le 9$.*

Ответ: 12345768.

Решение. Для того, чтобы число было наименьшим, оно должно иметь наименьшее количество цифр. Из признака делимости на 9 получаем, что $1 + 2 + ... + k$ должно делиться на 9, но наименьшее k, для которого это выполняется – $k = 8$. Теперь требуется, чтобы число было наименьшим из тех, что делится на 4. То есть две последние цифры образуют число, кратное 4. Так как числа 12345678 и 12345687 условию не удовлетворяют, то цифра сотен не меньше, чем 7. Среди двух возможных чисел 12345768 и 12345786 – первое будет искомым.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Найденный набор цифр – 2 балла. Только ответ – 1 балл.

4. *В землю посадили саженец с 4 листочками без цветочков. Каждый день на нём вырастает либо 3 новых цветочка и 7 листочков, либо 4 новых цветочка и 9 листочков. Через некоторое время на саженце было 50 листочков. Сколько в этот момент на саженце было цветочков?*

Ответ: 20 цветочков.

Решение. Пусть дней, когда вырастало по 7 листочков, было x, а дней, когда по 9 листочков, – y. Тогда получаем равенство: $50 = 4 + 7x + 9y$ или $46 = 7x + 9y$. Перебором находим единственный возможный ответ в натуральных числах: $x = 4$ та $y = 2$. Таким образом, цветочков на этом саженце стало $3x + 4y = 20$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 1 балл.

5. *В стране один город расположен в центре окружности и еще n городов, расположенных по окружности. Каждый из городов на окружности соединён дорогами с двумя соседними и с городом, расположенным в центре. На каждой из 2n дорог установлено одностороннее движение, таким образом, что из каждого города есть выезд и в каждый город есть въезд. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого, не нарушив правила.*

Решение. Сначала покажем, что из каждого города $A \ne O$, где O – центральный город, можно добраться до города O. Если есть путь $A \to O$, то утверждение доказано. Если $A \leftarrow O$, то двигаемся из A в направлении, по которому можно двигаться: $A = A_1 \to A_2 \to ... \to A_k$. Если хоть для одного из городов $A_i \to O$ – утверждение доказано. Иначе – цикл завершается тем, что $A = A_1 \to A_2 \to ... \to A_n$

$\to A_1$. Но тогда получаем противоречие с тем, что, в O не заходит ни один путь. Аналогично доказывается, что из O можно добраться до любого города $A \neq O$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.