УДК 37.0
ББК 74.202
П78

Печатается по решению редакционно-издательского совета Иркутского государственного университета

Рецензенты:
академик МАНПО, проф. *Н. К. Душутин*
д-р пед. наук, проф. *О. Л. Подлиняев*

П78 **Проблемы** учебного процесса в инновационных школах : сб. науч. тр. / под ред. О. В. Кузьмина. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2015. – Вып. 20. – 159 с.
ISBN 978-5-9624-1314-3

Представлен опыт работы преподавателей вузов, учителей и психологов инновационных средних учебных заведений Иркутска, Москвы, Санкт-Петербурга, Йошкар-Олы, Улан-Удэ и Иркутской области.

Для студентов университетов и пединститутов, а также руководителей, преподавателей, психологов и учащихся вузов, инновационных и общеобразовательных школ.

УДК 37.0
ББК 74.202

ISBN 978-5-9624-1314-3

СОДЕРЖАНИЕ

Задача одна – решения разные

В. Н. Агейчик
МАОУ «Лицей ИГУ г. Иркутска», г. Иркутск
А. Г. Зенцов
НОУ «ЛИЦЕЙ № 36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

Аннотация. Приводятся разные решения (доказательства) геометрической задачи с короткими комментариями методического характера.

Ключевые слова: метод решения, геометрия, коллекция задач.

Методикой обосновано и практикой подтверждено то, что при обучении решению геометрических задач существенный вклад вносят задачи с несколькими решениями. Коллекция таких задач усиливает методический арсенал учителя. «Длительная работа над одной и той же задачей часто полезнее, чем решение нескольких задач» [1, 4].

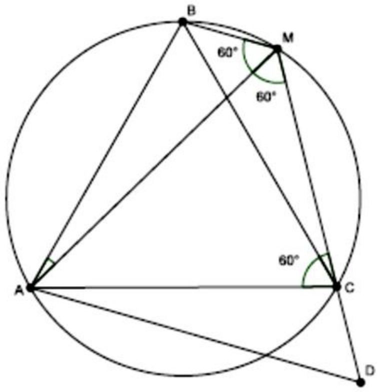
В процессе решения задачи различными методами углубляются и систематизируются знания геометрии, формируются умения находить решения задач повышенной сложности, развиваются исследовательские умения, геометрическое воображение и интуиция.

Приведем пример задачи, к которой можно применить более 10 методов решения (доказательств).

Задача. Равносторонний треугольник *ABC* вписан в окружность. На окружности отмечена точка *M*, не совпадающая ни с одной из точек *A*, *B* и *C*. Докажите, что расстояние от точки *M* до одной из вершин треугольника равно сумме расстояний до двух других его вершин.

В книге [1] авторы привели пять решений этой задачи. Мы решили дополнить эти решения, опираясь на изложенную выше точку зрения.

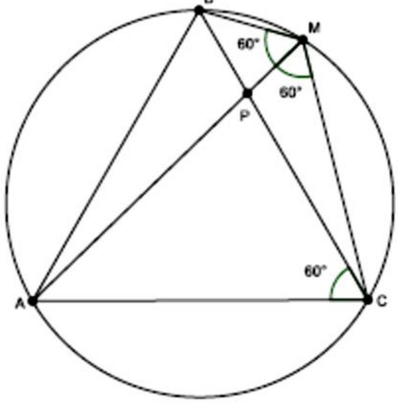
1. Метод дополнительных построений



Продолжим MC за точку C так, что CD = BM. Так как ∠ACD = ∠ABM = 120° – α, где α = ∠BAM и AB = AC, следовательно, треугольники ACD и ABM равны. Треугольник AMD получился равносторонний, следовательно,

AM = BM + MC.

Мы привели один из возможных вариантов дополнительных построений.



2. Метод подобия

Пусть AB = a, BM = b, AM = c, MC = d. Так как углы ACM и APC равны 60° + α, следовательно треугольники AMC и APC подобны:

$$\frac{PC}{MC}=\frac{AC}{AM} \;=>\; PC=\frac{ad}{c}.$$

Треугольники AMC и BPM подобны:

$$\frac{PB}{AC}=\frac{BM}{AM}=>PB=\frac{ab}{c}.\;\; PC+PB=\frac{ad}{c}+\frac{ab}{c},$$

$$a=\frac{ad}{c}+\frac{ab}{c} \;=>\; c=b+d.$$

Заметим, что удачное применение данного метода зависит от выбора пар подобных треугольников.

3. Применение теоремы косинусов

Пусть $AB = a$, $BM = b$, $AM = c$, $CM = d$. *В треугольнике* BMC $a^2 = b^2 + d^2 + bd$. *В треугольнике* ABM $a^2 = b^2 + c^2 – bc$. *Из этих равенств следует* $d^2 + bd = c^2 – bc$, $b(d + c) = (c + d)(c – d) => c = b + d$.

4. Применение теоремы синусов

Пусть $AB = a$, $BM = b$, $AM = c$, $CM = d$, $\angle ACM = \angle APC = \alpha$.

В Δ AMC $\frac{c}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin 60^\circ}$. *В* Δ BPM $\frac{b}{\sin\alpha}=\frac{BP}{\sin 60^\circ}$. *В* Δ PMC $\frac{d}{\sin\alpha}=\frac{PC}{\sin 60^\circ}$.

Следовательно, $\frac{b}{\sin\alpha}+\frac{d}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin 60^\circ} => b + d = c$.

Возможен более тригонометрический вариант применения теоремы синусов на основе формулы синуса суммы двух углов (10-11 кл.).

5. Применение следствия теоремы синусов

Пусть в ΔMAB $\angle BAM = \alpha$. *Тогда* $MB = 2R\sin\alpha$. *В* Δ MAC, $MC = 2R\sin(60^\circ – \alpha)$, $AM = 2R\sin(60^\circ + \alpha)$. Тогда

$MB + MC = 2R (\sin\alpha + \sin(60^\circ – \alpha)) = 2R \sin(60^\circ + \alpha)$, *следовательно,* $AM = BM + MC$

6. Метод площадей

Снова воспользуемся предыдущим рисунком. *Пусть* $AB = a$, $BM = b$,

$AM = c$, $MC = d$, $\angle ACM = \angle APC = \alpha$, $\angle ABM = 180^\circ – \alpha$.

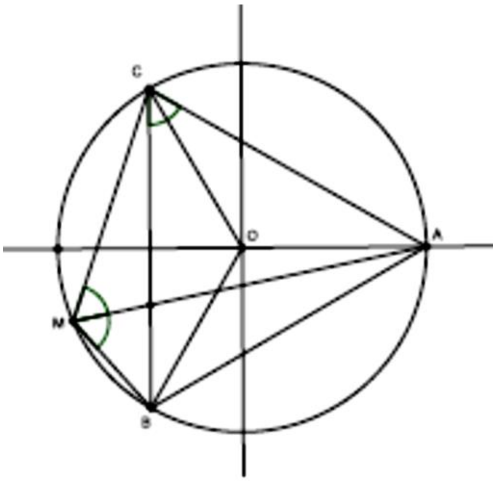
$$S_{ABMC} = \frac{1}{2} AM \cdot BC \cdot \sin\alpha,\ S_{ACM} = \frac{1}{2} AC \cdot CM \cdot \sin\alpha,\ S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM \cdot \sin\alpha.$$

Для площади треугольника *ABM* применили формулу $sin(180° - \alpha) = sin\alpha$.

$$S_{ABMC} = S_{ACM} + S_{ABM} \Rightarrow AM = MC + BM\ (BC = AB = AC).$$

7. Координатный метод

Точка O – центр описанной окружности. Пусть OC = 1,



$x^2 + y^2 = 1$ – *уравнение окружности*, $A\ (1; 0)$, $M\ (x, y)$, $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $B\ (-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $C\ (-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$$AM^2 = (x-1)^2 + y^2 = 2 - 2x,$$

$$BM = \sqrt{2 + x + y\sqrt{3}},\ CM = \sqrt{2 + x - y\sqrt{3}}.$$

Получаем равенство: $AM^2 = (BM + CM)^2$.

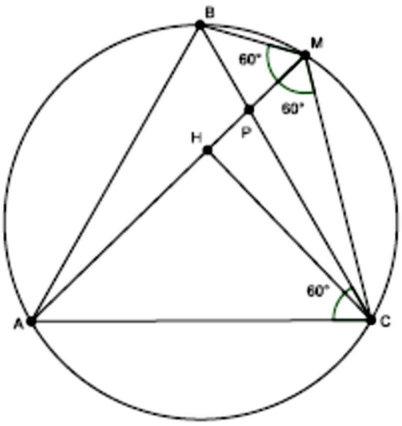
Заметим, что предложенный выбор системы координат минимизирует алгебраические выкладки. В этом можно убедиться, выбирая другую систему координат. Удачный выбор *XOY* решает спор о целесообразности координатного метода.

8. Векторный метод

Пусть AB = a, BM = b, AM = c, CM = d, $\angle CAM = \alpha$

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} \quad 2\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$$

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA})$$



$$2c^2 = cd \cdot \cos 60° + ca \cdot \cos(60° - \alpha) + cb \cdot \cos 60° + ca \cdot \cos\alpha$$

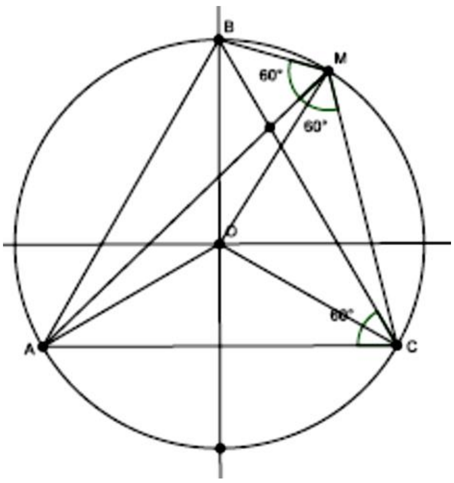
$2c = \frac{1}{2}d + a \cdot \cos(60° - \alpha) + \frac{1}{2}b + a \cdot \cos\alpha$, *или*

$4c = d + b + a \cdot (3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)$. *В* ΔAHC *AH* $= a\cos\alpha$, *HC* $= a\sin\alpha$. *В* Δ *MHC* $HM = HC \cdot ctg\ 60°$,

$$HM = \frac{1}{\sqrt{3}} a \sin\alpha \Rightarrow$$

$a \cdot (3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) = 3AM = 3c$, *следовательно, c = b + d.* Считая в данной задаче нецелесообразным применение векторного метода, мы приводим это решение, как одно из возможных.

9. Метод комплексных координат



Расположим начало системы координат в центре описанной окружности. Точкам A, B и C соответствуют комплексные числа z_A, i, z_C, *точке M соответствует* z.

$$z_C = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_A = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

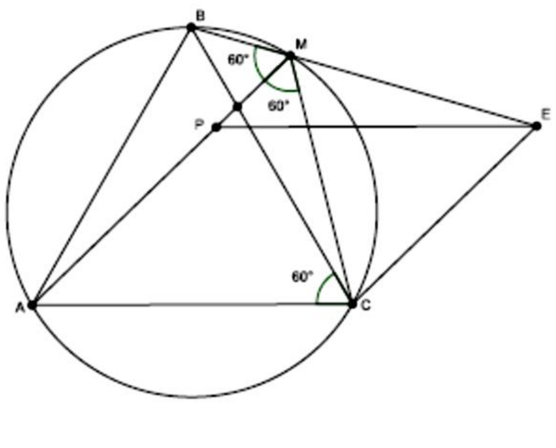
Пусть $e = \cos 60° + i \sin 60°$, $e = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$$e - 1 = \cos 120° + i \sin 120°, \quad e - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Числу $(i - z)e$ *соответствует вектор, полученный поворотом на 60° против часовой стрелки вектора* $i - z$. *Числу* $(z - z_C)(e - 1)$ *соответствует вектор, полученный поворотом вектора* $z - z_C$ *на 120° против часовой стрелки. Векторы* $(i - z)e$ *и* $(z - z_C)(e - 1)$ *сонаправлены с вектором* $z_A - z$. *Так как выполняется равенство* $(i - z)e + (z - z_C)(e - 1) = z_A - z$, *следовательно, AM = MC + BM.*

Мы привели один из возможных вариантов применения метода комплексных координат.

10. Метод поворота



Треугольник PEM получен поворотом треугольника BCM вокруг точки M на 60°, PM = BM, ME = MC = CE. PE // AC и PE = AC => AP = CE => AM = CM + BM.

Данное равенство можно получить, повернув треугольник *BCM* вокруг точки *C* на 60^0 против часовой стрелки [1, 28].

11. Применение дополнительной теоремы

Решение ряда геометрических задач упрощается благодаря применению таких дополнительных теорем, как, например, теорема Менелая или теорема Птолемея. Применим теорему Птолемея для вписанного четырехугольника *ABMC* в нашем примере: $AM \cdot BC = AB \cdot CM + AC \cdot BM$. Стороны *BC, AB, AC* равны по условию, следовательно $AM = CM + BM$.

В заключении заметим, что большинство приведенных решений можно рассматривать, как комбинации геометрических и алгебраических методов. Коллекционирование задач с разными решениями актуально для учителя и полезно для учащихся.

Литература

1. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные: Геометр. задачи: Кн. для учащихся. – М. : Просвещение, 2000. – 224 с.

There is the only one task, but different solutions

B. Ageychik, A. Zentsov

Annotation. We present different solutions (proof) of a geometrical task with brief comments of a methodological nature.

Keywords: method of solving, geometry, the collection of problems.