В.Н. Агейчик, А.Г. Зенцов
Лицей № 36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

Методическая разработка «Применение геометрии в алгебраических задачах»

Аннотация. Данная методическая разработка представляет собой сборник задач школьной алгебры, при решении которых можно применять геометрию. Элементы геометрической алгебры можно осваивать уже в рамках наглядной геометрии 5 класса, и далее развивать это направление в процессе обучения на уроках и элективных курсах. Применение геометрии в алгебраических задачах имеет богатую историю и являет единство математики как науки и как школьного предмета. Развитие аналитических и геометрических навыков, формирование геометрической культуры – эти компоненты в методологической взаимосвязи отвечают целям математического образования.

Задачи.

1. При каком значении параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

<u>Решение.</u> Преобразуем уравнение к виду $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$. Это уравнение в системе координат XOA задает окружность с центром (3; 2) и радиусом 1 (рис. 1). Наибольшее расстояние между точками окружности, лежащими на одной прямой, параллельной оси абсцисс, равно 2 и достигается при $a = 2$.

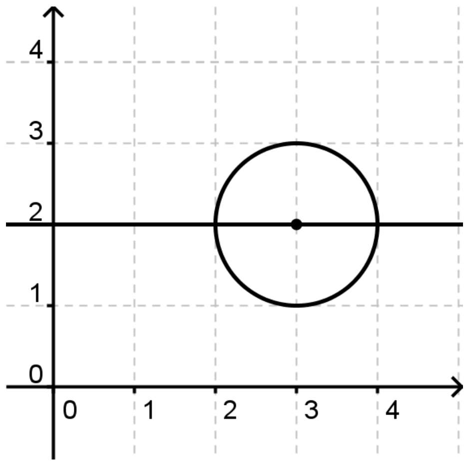


Рис. 1

<u>Ответ</u>: $a = 2$.

2. Решите уравнение $\sqrt{13 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = 2\sqrt{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

<u>Решение.</u> Рассмотрим треугольники ACD и BCD с общей стороной $CD = 2$ (рис. 2). $\angle ACD = x$, $AC = 3$, по теореме косинусов $AD = \sqrt{13 - 12\cos x}$. Угол BCD равен $\frac{\pi}{2} - x$, $BC = \sqrt{3}$, $BD = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x}$. В треугольнике ABC гипотенуза

AB равна $2\sqrt{3}$, значит, равна сумме данных корней. Следовательно, точка D принадлежит гипотенузе AB. Применяя метод площадей для треугольников ACD, BCD и ABC получаем $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, откуда $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ и $x = \arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}$.

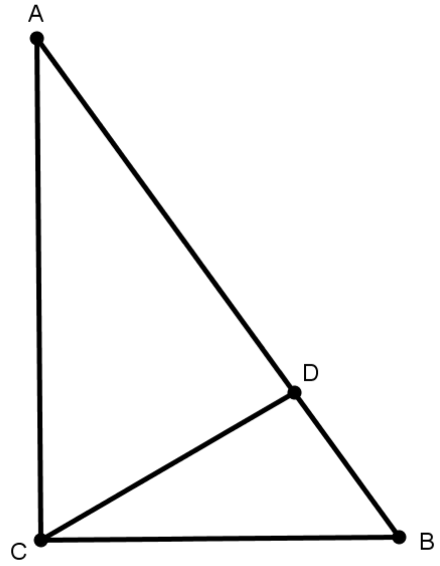


Рис. 2

Ответ: $x = \arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}$.

3. Найдите значение x, при котором сумма $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$ минимальна.

Решение. $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}} =$

$= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = AC + CB$

(рис. 3), где $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $C(x;\ 0)$. Сумма $AC + CB$ будет минимальной, если равны острые углы, которые составляют прямые AC и CB с осью OX *(задача Герона)*. Искомое значение x_0 находим из следующей пропорции:

$\frac{AP}{PC} = \frac{BN}{CN}$, $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BN = \frac{1}{2}$, $PC = x_0 - \frac{1}{2}$,

$CN = \frac{\sqrt{3}}{2} - x_0$. Тогда $x_0 = \sqrt{3} - 1$.

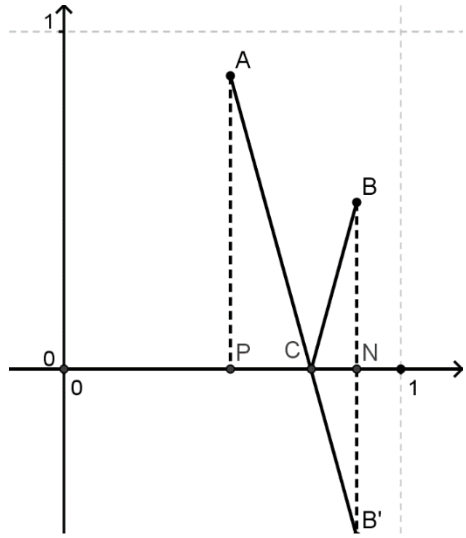
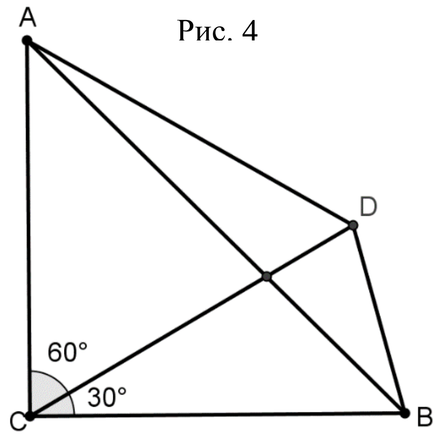


Рис. 3

Ответ: $x_0 = \sqrt{3} - 1$.

Если поставлена задача найти только наименьшее значение выражения $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$, то для решения рассмотрим треугольники ACD и BCD с общей стороной $CD = x$ (рис. 4). Угол ACD равен 60°, $AC = 1$, $AD = \sqrt{1 + x^2 - x}$ (теорема косинусов). Угол BCD равен 30°, $BC = 1$, BD =

Рис. 4



$\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$. Ломаная *ADB* имеет наименьшую длину, если вершина *D* принадлежит гипотенузе *AB* равнобедренного треугольника *ACB*. Искомое значение равно $\sqrt{2}$.

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-5)^2+9}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{4+(y-4)^2}.$$

Решение. На плоскости *XOY* (рис. 5) зададим следующие точки: *A*(2; 4), *B*(5; 3), *C*(*x*, 0), *E*(0, *y*). Тогда первый корень – это длина отрезка *BC*, второй корень – длина *CE* и третий корень – длина *AE*. Точка *P*(– 2; 4) симметрична *A* относительно оси *OY*, точка *M*(5; – 3) симметрична *B* относительно *OX*. Длина ломаной *AECB* равна длине ломаной *PECM*, так как *EA* = *EP* и *CB* = *CM*. Ломаная *PECM* имеет наименьшую длину, если точки *E* и *C* расположены на отрезке *PM*, равном $7\sqrt{2}$.

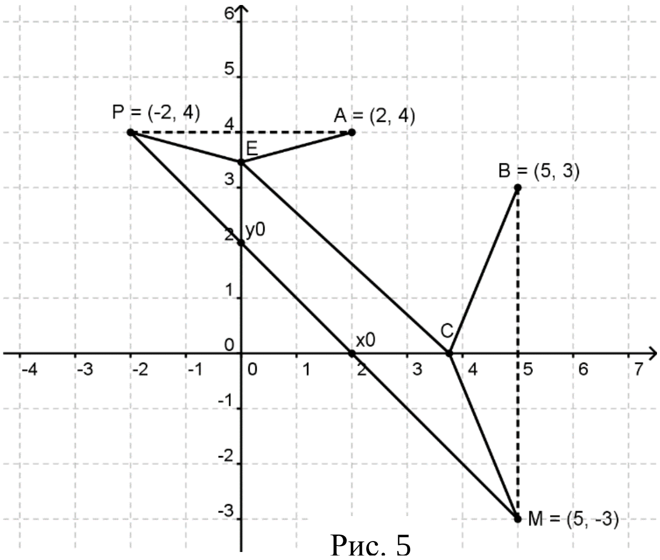


Рис. 5

Ответ: $7\sqrt{2}$.

Заметим, что составив уравнение прямой *PM*, мы можем найти значения x_0 и y_0, при которых данная сумма корней будет наименьшей.

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2},\text{ если } x-y-3=0.$$

Решение. Данную сумму можно интерпретировать, как сумму расстояний от точки *C*(*x*, *y*) прямой *a*, заданной уравнением *x* – *y* – 3 = 0, до точек *O*(0; 0) и *A*(4; 3) на плоскости *XOY* (рис. 6). Точка $C(x_0, y_0)$, отвечающая усло-

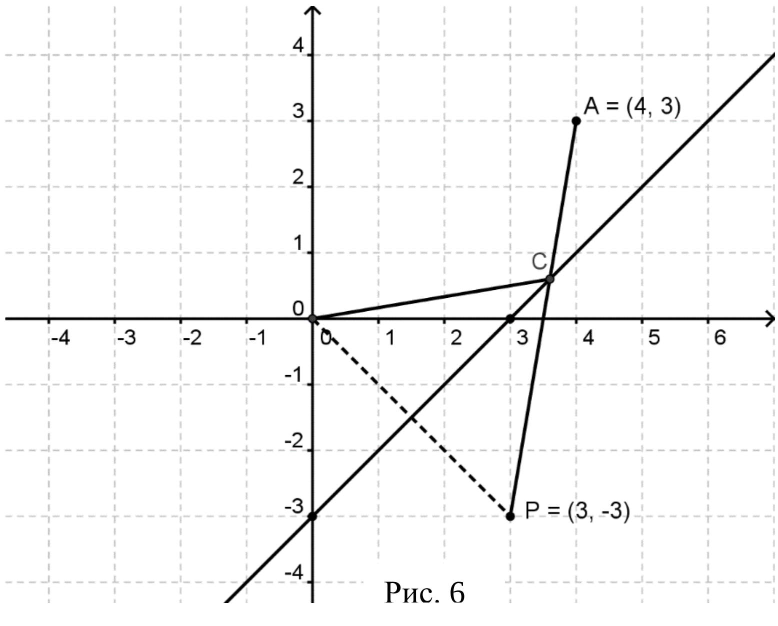


Рис. 6

вию задачи, расположена на отрезке AP, где точка $P(3; –3)$ симметрична O относительно прямой *a (задача Герона)*. Длина отрезка AP, равная $\sqrt{7}$, есть искомое значение.

Ответ: $\sqrt{7}$.

6. Определите все значения, которые может принимать выражение $3x – 2y$, если $x^2 + y^2=13$.

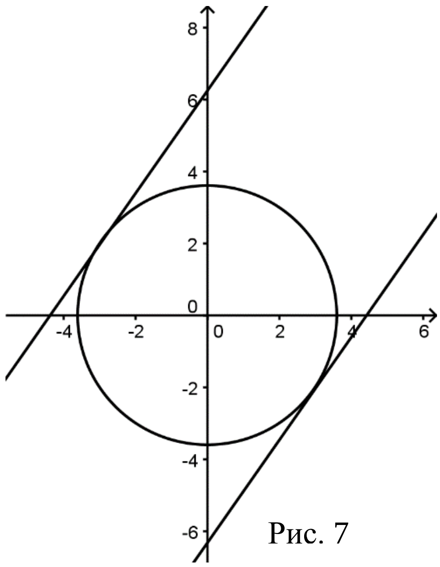


Рис. 7

Решение. Пусть $3x – 2y = a$. Искомые значения a можно найти, исследуя взаимное расположение окружности с радиусом $\sqrt{13}$ (рис. 7) и прямых вида $y = \frac{3}{2}x - \frac{a}{2}$. Рассмотрим треугольник AOB (рис. 8). Прямая AB – касательная к окружности. Пусть $\angle BAO = \alpha$, тогда $\angle BOK = \alpha$. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}5$ и $OK = \sqrt{13}$, найдем $OB = 6{,}5$. $|a| = 2OB$, следовательно, $–13 \le a \le 13$.

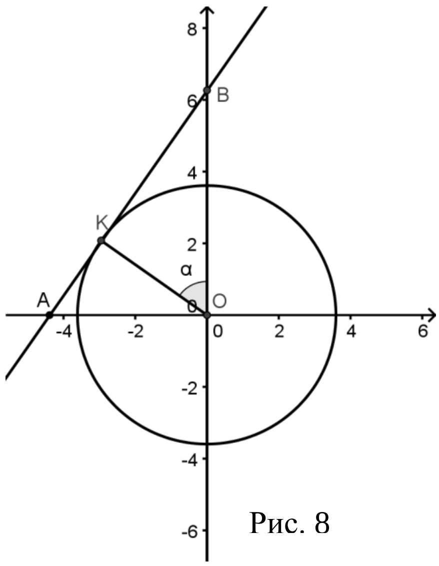


Рис. 8

Можно найти a, применив формулу расстояния от точки O до прямой $3x – 2y – a = 0$.

$\sqrt{13} = \frac{|a|}{\sqrt{13}}$, $|a| = 13$.

Ответ: $[–13; 13]$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение запишем в виде $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$ + $+\sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} = 10$. Первый корень – расстояние (рис. 9) между точками $C(x, y)$ и $A(2; – 1)$. Второй корень – расстояние между точками $C(x, y)$ и

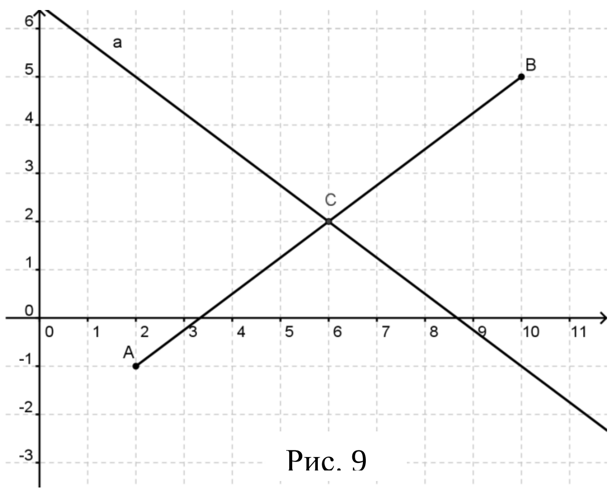


Рис. 9

$B(10; 5)$. Так как $AB = 10$ и сумма $AC + CB = 10$, то точка C расположена на отрезке AB и является точкой пересечения прямых AB и a, заданных уравнениями $3x – 4y = 10$ и $3x + 4y = 26$ соответственно.

Ответ: (6; 2)

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \ge 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{x^2+(y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \le 2\sqrt{13}. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Первый корень – расстояние (рис. 10) между $C(x, y)$ и $B(0; 8)$. Второй корень – расстояние между $C(x, y)$ и $A(6; 4)$. $AB = 2\sqrt{13}$ и $CB + CA \le 2\sqrt{13}$, следовательно, точка C расположена на отрезке AB. В первом неравенстве $\sqrt{x^2+y^2} = CO$, второй корень – расстояние между C и $D(2; 4)$. $CO \ge CD + 2\sqrt{5}$. Так как $OD = 2\sqrt{5}$ и $CO \ge CD + OD$, делаем вывод, что точка C расположена на прямой OD и является точкой пересечения прямых OD и AB, заданных уравнениями $y = 2x$ и $2x + 3y – 24 = 0$ соответственно.

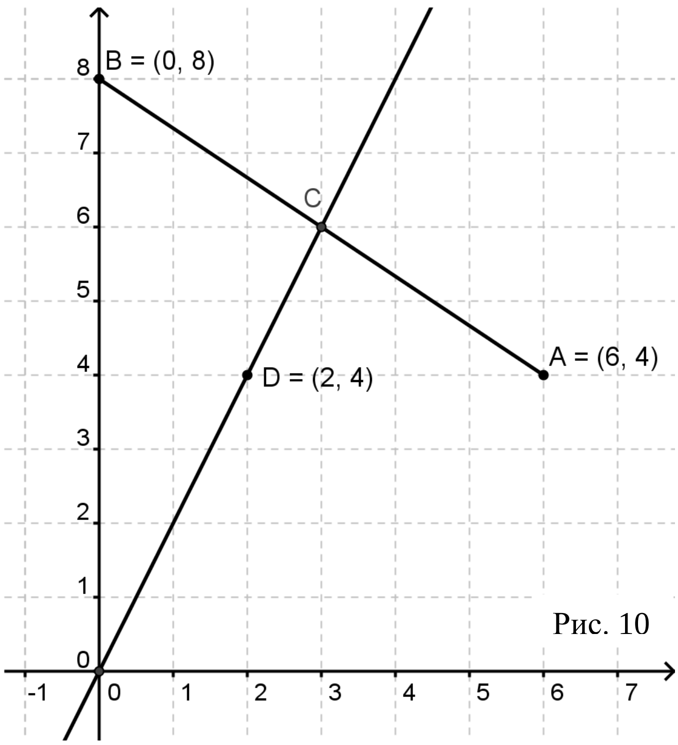


Рис. 10

Ответ: (3; 6)

9. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x^2+(y-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2| = 2\sqrt{5}$.

Решение. Интерпретируем корень, как расстояние между точками $B(0; 4)$ и $C(x , y)$ на плоскости XOY (рис. 11). Второе слагаемое уравнения – это расстояние от точки C до прямой a, заданной уравнением $x – 2y – 2 = 0$. Прямая a пересекает OX в точке $A(2; 0)$, при этом $AB = 2\sqrt{5}$ и прямая AB пер-

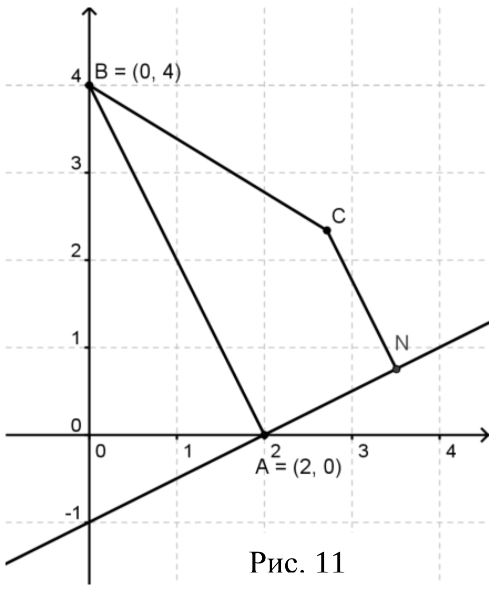


Рис. 11

пендикулярна a (следует из подобия прямоугольных треугольников, или проверяется теоремой Пифагора). Пусть точка N – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую a. Тогда равенство $BC + CN = AB$ выполняется при условии принадлежности точки C отрезку AB, на котором расположены следующие целочисленные точки: (0; 4), (1; 2), (2; 0).

Ответ: (0; 4), (1; 2), (2; 0).

10. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-a)^2+(y-a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-4)^2+y^2=1, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Точка $C(x, y)$ на координатной плоскости принадлежит окружности ω с центром в точке $E(4; 0)$ и радиусом 1 (рис. 12). $OC = \sqrt{x^2+y^2}$. Точка $A(a, a^2)$ удалена от начала координат на расстояние, равное $|a|\sqrt{1+a^2}$. Первое уравнение запишем в виде суммы $OC = OA + AC$. Равенство выполняется, если точка A параболы $y = x^2$ принадлежит отрезку OC. Единственное решение система имеет при условии касания прямой OC и ω. Уравнение касательной $x - \sqrt{15}y = 0$. Значения a находим из уравнения $a - \sqrt{15}a^2 = 0$. При $a = \frac{\sqrt{15}}{15}$ система имеет единственное решение.

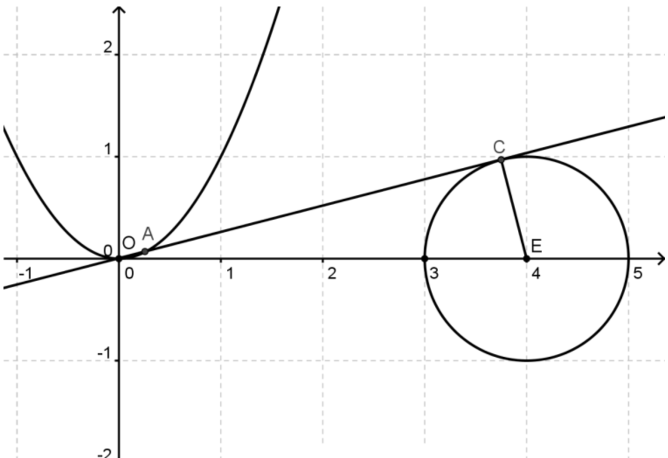


Рис. 12

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

11. Из условий $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 16$ и $y^2 = xz$ для положительных x, y, z укажите значение выражения $xy + yz$.

Решение1. Рассмотрим векторы $\vec{a}(x; y)$ и $\vec{b}(z; -y)$. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Из третьего равенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. Рассмотрим вектор

$\vec{c}(y; z)$. Он перпендикулярен вектору $\vec{b}$, а, значит, коллинеарен вектору $\vec{a}$, и даже сонаправлен с ним (координаты положительны). Тогда $xy + yz = \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 4 = 12$.

<u>Решение 2.</u> Рассмотрим прямоугольные треугольники с общим катетом y и катетами x и z, лежащими на одной прямой (рис. 13). Из третьего равенства получаем, что угол $ACB = 90°$ и ABC – прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и площадью, равной 6. Величина $xy + yz$ – удвоенная площадь. Она равна 12.

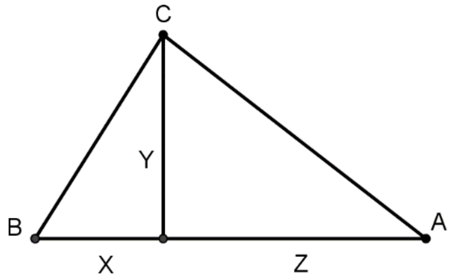


Рис. 13

<u>Ответ</u>: 12.

12.Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

<u>Решение 1.</u> Первое уравнение – уравнение плоскости ABC (рис. 14). Второе – уравнение сферы с центром $O(0; 0; 0)$ и радиусом $R = 1$.

Пирамида $OABC$ – правильная, $AO = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$. Высота OH к основанию ABC равна 1, следовательно, точка H является точкой касания сферы и плоскости.

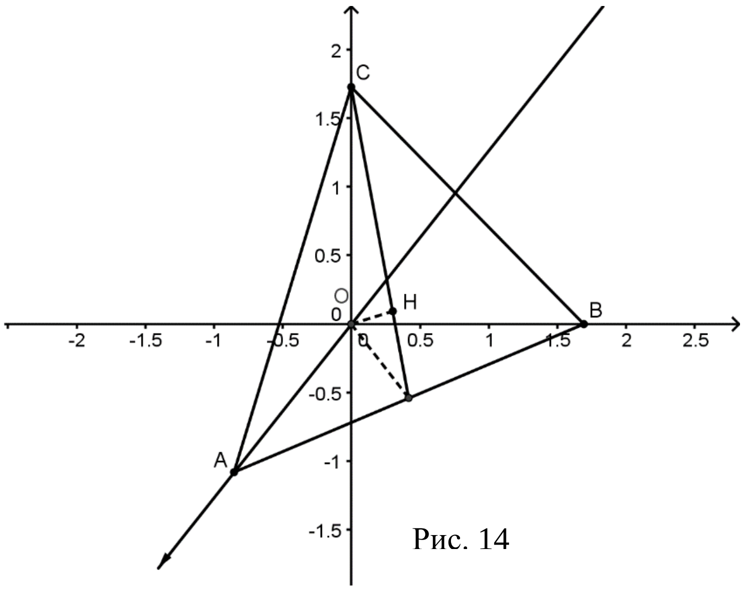


Рис. 14

Координаты $H(x_0, y_0, z_0)$ являются решениями данной системы. Проекции H легко найти, зная что H делит высоту треугольника ABC в отношении 2 : 1 от вершины C.

<u>Решение 2.</u> Можно применить вектор $\overrightarrow{OH}$, коллинеарный вектору {1; 1; 1}, тогда $x_0 = k$, $y_0 = k$, $z_0 = k$. Подставив эти координаты в уравнение плоскости, найдем $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение 3. Еще способ решения через скалярное произведение. Пусть $\vec{a}(x; y; z)$, $\vec{b}(1; 1; 1)$. Тогда $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, векторы коллинеарны, их координаты пропорциональны. Значит, $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

13. Найдите наибольшее значение k, при котором имеет хотя бы одно решение система $\begin{cases} x + y + z = k \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y \leq 2k - 2. \end{cases}$

Решение. Неравенство приведем к виду $x^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 2k - 1$. В координатном пространстве это шар с центром $C(0;\ 1;\ 0)$ и радиусом $R = \sqrt{2k-1}$. Для решения задачи достаточно сравнить расстояние h от центра C до плоскости $x + y + z - k = 0$ и радиус шара. Хотя бы одно решение будет при условии $R \geq h$. Расстояние h найдем по формуле расстояния от точки до плоскости, $h = \frac{|1-k|}{\sqrt{3}}$. Получаем неравенство $k^2 - 8k + 4 \leq 0$, равносильное неравенству $R \geq h$ и имеющее наибольшее решение, равное $4 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $4 + 2\sqrt{3}$.

14. Докажите неравенство $\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leq \frac{ab}{c}$ для положительных чисел a, b, c, для которых оно имеет смысл.

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники BCD с гипотенузой a и катетом c и ACD с гипотенузой b и катетом c (рис. 15). Получаем треугольник ABC с высотой $CD = c$ и основанием $\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}$. Тогда его площадь равна $\frac{\left(\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}\right) \cdot c}{2}$, что не превосходит площади прямоугольного треугольника с катетами a и b, откуда $\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leq \frac{ab}{c}$.

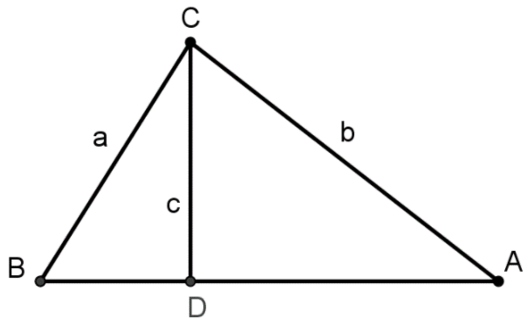


Рис. 15

15.Имеет ли решение в положительных числах система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4; \\ y^2 + yz + z^2 = 8; \\ z^2 + zx + x^2 = 36? \end{cases}$$

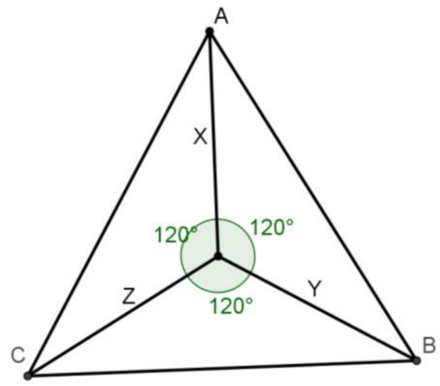


Рис. 16

Решение1. Рассмотрим три треугольника с углами 120° и прилежащими сторонами x и y, y и z, z и x соответственно (рис. 16). Получаем треугольник ABC со сторонами 2, $2\sqrt{2}$, 6, что противоречит неравенству треугольника.

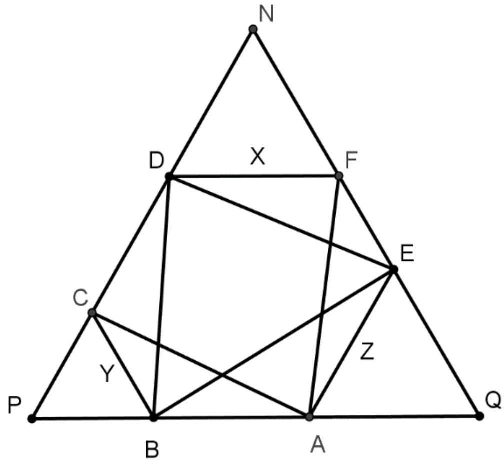


Рис. 17

Решение 2. Построим шестиугольник $ABCDFE$ (рис. 17), в котором $AB = x$, $BC = FE = y$, $CD = AE = z$, $\angle ABC = \angle BAE = \angle FEA = \angle BCD = 120°$. Используя равенства системы и применяя теорему косинусов, находим стороны AC, BE, BD и AF в треугольниках ABC, BAE, BCD и AEF. $AC = 2$, $BE = 6$, $BD = AF = 2\sqrt{2}$. Достроим шестиугольник до равностороннего треугольника PNQ, в котором $PN = x + y + z$, $DN = NF = DF = x$. Из равенства треугольников ABC и DFE следует, что $DE = AC = 2$. Тогда в треугольнике BDE оказывается противоречие в виде неравенства $BD + DE < BE$, что означает отсутствие решения системы.

16.Для положительных решений x, y, z системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25, \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$

определите величину $x\,y + 2\,y\,z + 3\,xz$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и z и гипотенузой 3, треугольник с углом 150°, прилежащими сторонами x и $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и противолежащей стороной 5, треугольник с углом 120°, прилежащими сторонами x и z и противолежащей стороной 4 (рис. 18). Получаем треугольник ABC со сторонами 3, 4 и 5. Искомая величина в $4\sqrt{3}$ раз больше площади треугольника ABC и равна $24\sqrt{3}$.

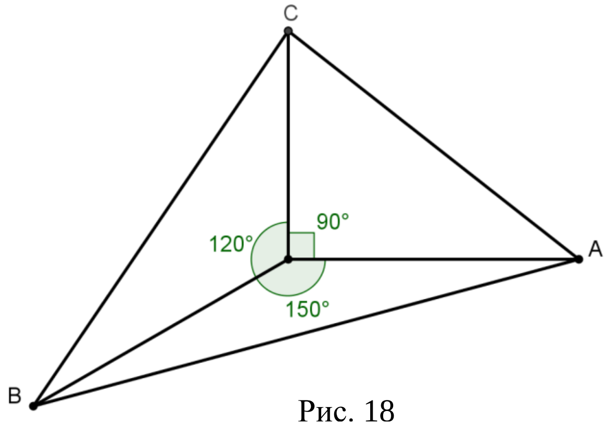


Рис. 18

Ответ: $24\sqrt{3}$.

17. Даны положительные числа a, b, c, d, причем $a > b > c > d$. Докажите, что

$$(a + b + c + d)^2 > a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2.$$

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b + c + d$. Внутри квадрата можно расположить непересекающиеся квадрат со стороной a, три квадрата со стороной b, пять квадратов со стороной c и семь квадратов со стороной d (рис. 19)

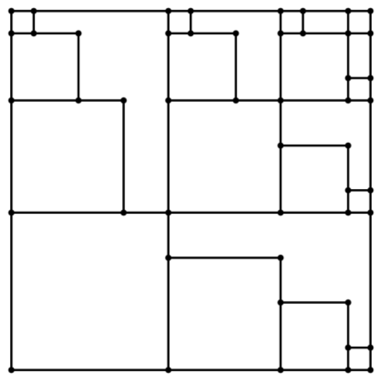


Рис. 19

18. Докажите неравенство

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1\cdot 199} + \sqrt{2\cdot 198} + \sqrt{3\cdot 197} + \ldots + \sqrt{99\cdot 101} < 2500\pi.$$

Решение. Рассмотрим среднюю часть двойного неравенства. Каждое слагаемое можно интерпретировать как высоту прямоугольного треугольника с гипотенузой 200. Рассмотрим четверть круга радиуса 100 и впишем ступенчатую фигуру из прямоугольников со стороной 1, лежащей на радиусе (рис. 20). Средняя часть – площадь этой фигуры. Она меньше площади четверти круга. Если рассмотреть ступенчатую фигуру, в которую вписана четверть круга, получим, что её площадь на 100 больше предыдущей фигуры, что завершает доказательство.

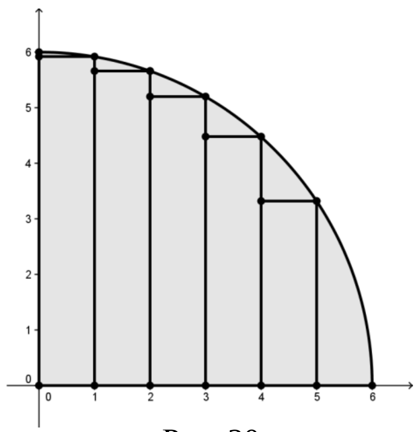


Рис. 20

Литература

1. Блинков, А. Д. Геометрия в негеометрических задачах [Текст] / А.Д. Блинков – М.: МЦНМО, 2016.
2. ЕГЭ 2008. Математика. Тренировочные задания [Текст] / Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелёва – М.: Эксмо, 2008.
3. Единый государственный экзамен: Математика: Тренировочные задания [Текст] / Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелёва – М.: Просвещение, Эксмо, 2005.
4. Задачи [Электронный ресурс] // Проект МЦНМО при участии школы 57 – Режим доступа: http://www.problems.ru/ (09 марта 2018 г.).
5. Курьякова, Т.С. Применение векторно-координатного метода в школьном курсе алгебры [Текст] / Т.С. Курьякова, Н.И. Степанова // Учебное пособие. – Иркутск: Издательство ОАО НПО «Облмашинформ», 2000.